

**ЗАДАНИЯ II-ГО (ОЧНОГО) ЭТАПА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
РГАУ-МСХА ИМЕНИ К.А. ТИМИРЯЗЕВА 2022/2023 гг.
МАТЕМАТИКА**

9 класс

1. Найти значение выражения $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$, где x_1, x_2 - корни уравнения $x^2 + 12x - 52 = 0$

2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 8x - 20 \leq 0 \\ x^8 - 256 \geq 0 \end{cases}$$

3. В равнобокой трапеции **MNPK**, **PE** — высота, проведённая к большему основанию **MK**. Найдите длину отрезка **ME**, если средняя линия **AB** трапеции равна 16, а меньшее основание **NP** равно 8.

4. Два мотоциклиста одновременно отправляются навстречу друг другу из пунктов А и В. Их скорости равны 40 км/ч и 60 км/ч соответственно. Первый мотоциклист через каждые 5 минут увеличивал скорость на 2 км/ч, а второй через каждые 10 минут увеличивал скорость на 1 км/ч. Через 93 минуты мотоциклисты встретились. Определить расстояние между пунктами А и В.

5. Доказать, что уравнение $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 48x + 17 = 0$ не имеет действительных решений.

6. В сосуде имеется три крана. Через первый и второй краны вода вливается, через третий выливается. Один первый кран может наполнить сосуд за 10 часов, а один второй – за 15 часов. При совместном действии всех трех кранов из полного сосуда выливается вся вода за 30 часов. Сосуд был полон, когда открыли первый и третий краны. Через 1 час после их открытия первый кран был закрыт, но открыт второй, а еще через 1 час закрыли третий кран и вновь открыли первый. Определите, через сколько минут после закрытия третьего крана два первых наполнят сосуд.

7. Пусть **ABC** – остроугольный треугольник. Точка **O** – центр описанной окружности. Прямая **AO** пересекает сторону **BC** в точке **D** так, что $OD=BD=1/3 BC$. Найдите углы треугольника **ABC**. Ответ обоснуйте.

10 класс

1. Найти значение выражения $x_1^4 x_2^2 + 2x_1^3 x_2^3 + x_1^2 x_2^4$, где x_1, x_2 - корни уравнения $x^2 + 18x - 5 = 0$

2. В равнобокой трапеции **MNPK**, **PE** — высота, проведённая к большему основанию **MK**. Найдите длину отрезка **ME**, если средняя линия **AB** трапеции равна 16, а меньшее основание **NP** равно 8.

3. Два мотоциклиста одновременно отправляются навстречу друг другу из пунктов А и В, расстояние между которыми 114,5 км. Первый мотоциклист через каждые 3 минуты увеличивал скорость на 2 км/ч, а второй через каждые 5 минут увеличивал скорость на 1 км/ч. Через час мотоциклисты встретились. Определить скорости мотоциклистов, если скорость первого мотоциклиста на 25-й минуте была равна скорости второго на 31-й минуте.

4. Доказать, что уравнение $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 48x + 17 = 0$ не имеет действительных решений.
5. В сосуде имеется три крана. Через первый и второй краны вода вливается, через третий выливается. Один первый кран может наполнить сосуд за 10 часов, а один второй – за 15 часов. При совместном действии всех трех кранов из полного сосуда выливается вся вода за 30 часов. Сосуд был полон, когда открыли первый и третий краны. Через 1 час после их открытия первый кран был закрыт, но открыт второй, а еще через 1 час закрыли третий кран и вновь открыли первый. Определите, через сколько минут после закрытия третьего крана два первых наполнят сосуд.
6. Пусть ABC – остроугольный треугольник. Точка O – центр описанной окружности. Прямая AO пересекает сторону BC в точке D так, что $OD=BD=1/3BC$. Найдите углы треугольника ABC . Ответ обоснуйте.
7. Упростить выражение $\sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha}$, где $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

11 класс

1. Упростить выражение

$$\frac{\sqrt[4]{x^5 \sqrt{x \cdot \sqrt[7]{x}}}}{x^{\frac{9}{28}}}$$

2. Решить неравенство

$$(3^x - 729) \left(\left(\frac{1}{2} \right)^x - 1024 \right) (5^x - 3125) \leq 0$$

3. Найти все корни уравнения $\sin \frac{\pi x}{3} - \cos \frac{\pi x}{3} = 0$ принадлежащие промежутку $\left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3} \right)$

4. Два мотоциклиста одновременно отправляются навстречу друг другу из пунктов А и В, расстояние между которыми 188,75 км. Их скорости равны 40 км/ч и 60 км/ч соответственно. Первый мотоциклист через каждые 5 минут увеличивал скорость на 2 км/ч, а второй через каждые 10 минут увеличивал скорость на 1 км/ч. Определить время, через которое мотоциклисты встретятся.

$$\frac{x}{|x|} + \frac{|y|}{y} = 2y$$

5. Построить график уравнения
6. Найти тангенсы острых углов прямоугольного треугольника, если известно, что биссектриса прямого угла равна разности катетов.
7. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy + 3x - y - 6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}} = 0 \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.